

Lógica en Acción

Capítulo 9: Demostraciones

`http://www.logicinaction.org/`

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Acerca de los **sistemas de derivación**.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Acerca de los **sistemas de derivación**.

- Las demostraciones no son naturales (e.g., considere la demostración de $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$).

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Acerca de los **sistemas de derivación**.

- Las demostraciones no son naturales (e.g., considere la demostración de $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$).
- No facilitan razonamiento *condicional*.

La propiedad de *deducción*

La propiedad de *deducción*

$\Sigma, \varphi \models \psi$ si y solo si $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

1 $\left\{ \begin{array}{l} \varphi \end{array} \right.$

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

$$\begin{array}{l|l}
 1 & \varphi \\
 \hline
 2 & \varphi
 \end{array}
 \quad \text{repetición 1}$$

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

1	φ	
2	φ	repetición 1
3	$\varphi \rightarrow \varphi$	deducción 1-2

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

1	φ	
2	φ	repetición 1
3	$\varphi \rightarrow \varphi$	deducción 1-2

Esta es la idea detrás de la **regla de deducción**.

La regla de deducción

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

La regla de deducción

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

- Asumamos φ .

φ

La regla de deducción

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

- Asumamos φ .
- Si basados en esta suposición



La regla de deducción

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

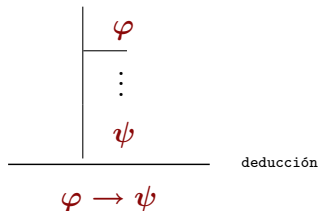
- Asumamos φ .
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar ψ ,



La regla de deducción

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

- Asumamos φ .
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar ψ ,
- entonces hemos demostrado $\varphi \rightarrow \psi$.



Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

$$\textcircled{1} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

$$\textcircled{1} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\textcircled{2} \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

$$\textcircled{1} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\textcircled{2} \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\textcircled{3} \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Demostramos los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

Demostrando los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

$$1 \quad \left[\varphi \right.$$

Demostramos los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

$$\begin{array}{l}
 1 \quad | \quad \varphi \\
 \hline
 2 \quad | \quad | \quad \psi
 \end{array}$$

Demostryo los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

1	φ		
2	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">3</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> φ </td> </tr> </table>	3	φ
3	φ		
3	φ		

repetición 1

Demostramos los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

1	φ	
2	ψ	
3	φ	repetición 1
4	$\psi \rightarrow \varphi$	deducción 2-3

Demostramos los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

1	φ	
2	ψ	
3	φ	repetición 1
4	$\psi \rightarrow \varphi$	deducción 2-3
5	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	deducción 1-4

Demostroyo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

Demostrando los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

$$1 \quad \boxed{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)}$$

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

$$\begin{array}{l}
 1 \quad | \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \\
 2 \quad | \quad \varphi \rightarrow \psi
 \end{array}$$

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$
2	$\varphi \rightarrow \psi$
3	φ

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$
2	$\varphi \rightarrow \psi$
3	φ
4	ψ

modus ponens 3,2

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	
2	$\varphi \rightarrow \psi$	
3	φ	
4	ψ	modus ponens 3,2
5	$\psi \rightarrow \chi$	modus ponens 3,1

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	
2	$\varphi \rightarrow \psi$	
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">φ</div>	
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">ψ</div>	modus ponens 3,2
5	$\psi \rightarrow \chi$	modus ponens 3,1
6	χ	modus ponens 4,5

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	
2	$\varphi \rightarrow \psi$	
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">φ</div>	
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">ψ</div> </div>	modus ponens 3,2
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\psi \rightarrow \chi$</div>	modus ponens 3,1
6	χ	modus ponens 4,5
7	$\varphi \rightarrow \chi$	deducción 3-6

Demostrando los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	
2	$\varphi \rightarrow \psi$	
3	φ	
4	ψ	modus ponens 3,2
5	$\psi \rightarrow \chi$	modus ponens 3,1
6	χ	modus ponens 4,5
7	$\varphi \rightarrow \chi$	deducción 3-6
8	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	deducción 2-7

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1		$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$				
2						
2			$\varphi \rightarrow \psi$			
3						
3				φ		
4						
4					ψ	modus ponens 3,2
5					$\psi \rightarrow \chi$	modus ponens 3,1
6					χ	modus ponens 4,5
7					$\varphi \rightarrow \chi$	deducción 3-6
8					$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	deducción 2-7
9					$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	deducción 1-8

Necesitamos mas

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

*no puede ser demostrado tan solo con *modus ponens* y *deducción*.*

Necesitamos mas

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

no puede ser demostrado tan solo con *modus ponens* y *deducción*.

Necesitamos una regla para trabajar con negaciones.

La regla de refutación

Supongamos que queremos demostrar φ .

La regla de refutación

Supongamos que queremos demostrar φ .

- Asumamos $\neg\varphi$.

$\neg\varphi$

La regla de refutación

Supongamos que queremos demostrar φ .

- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición



La regla de refutación

Supongamos que queremos demostrar φ .

- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar una contradicción \perp ,



La regla de refutación

Supongamos que queremos demostrar φ .

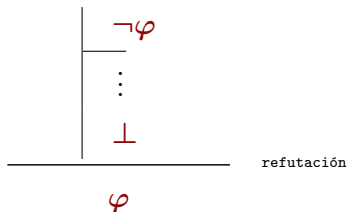
- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar una contradicción \perp ,
- entonces $\neg\varphi$ no puede ser verdadera



La regla de refutación

Supongamos que queremos demostrar φ .

- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar una contradicción \perp ,
- entonces $\neg\varphi$ no puede ser verdadera
- por lo tanto, hemos demostrado φ .



Demostroyo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

Demostroyo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

$$1 \quad \boxed{\neg\varphi \rightarrow \neg\psi}$$

Demostroyo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

$$\begin{array}{l}
 1 \quad | \quad \neg\varphi \rightarrow \neg\psi \\
 2 \quad | \quad \neg\psi \\
 \quad \quad | \quad \psi
 \end{array}$$

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> ψ </div>
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $\neg\varphi$ </div> </div>

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2	ψ	
3	$\neg\varphi$	
4	$\neg\psi$	modus ponens 3,1

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2	ψ	
3	$\neg\varphi$	
4	$\neg\psi$	modus ponens 3,1
5	\perp	modus ponens 2,4

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2	ψ	
3	$\neg\varphi$	
4	$\neg\psi$	modus ponens 3,1
5	\perp	modus ponens 2,4
6	φ	refutación 3-5

Demostrando los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">ψ</div>	
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg\varphi$</div> </div>	
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg\psi$</div> </div>	modus ponens 3,1
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">\perp</div> </div>	modus ponens 2,4
6	φ	refutación 3-5
7	$\psi \rightarrow \varphi$	deducción 2-6

Demostramos los axiomas (3)

El axioma

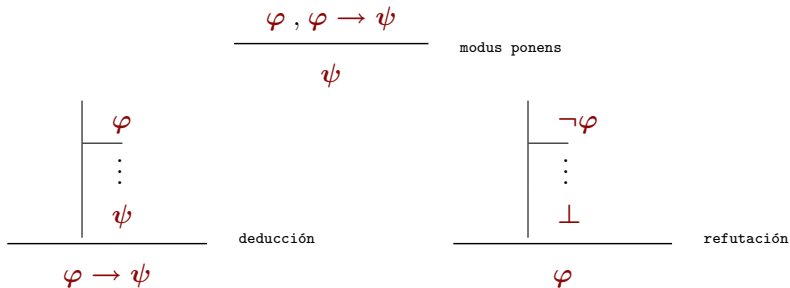
$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

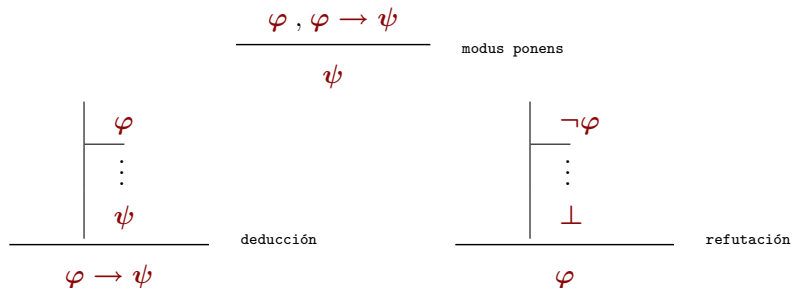
1		$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

En el paso 5, recuerde que $\neg\psi$ puede entenderse como una abreviación de $\psi \rightarrow \perp$.

Por lo tanto ...



Por lo tanto ...



Las reglas de *modus ponens*, *deducción* y *refutación* forman un sistema completo para la lógica proposicional.

Para facilitar el trabajo ...

Para facilitar el trabajo ...

- El sistema de **deducción natural** introduce reglas para manipular todos los conectivos de una manera simple.

Para la implicación \rightarrow

Para la implicación \rightarrow

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \text{modus ponens}$$

Para la implicación \rightarrow

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \text{modus ponens}$$

$$\mathbf{E}_{\rightarrow}$$

Para la implicación \rightarrow

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \text{modus ponens}$$

$$\frac{\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \quad \text{deducción}$$

E_→

Para la implicación \rightarrow

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \text{modus ponens}$$

E_→

$$\frac{\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \quad \text{deducción}$$

I_→

Para la negación \neg

Para la negación \neg

$$\frac{\neg\varphi, \varphi}{\perp}$$

Para la negación \neg

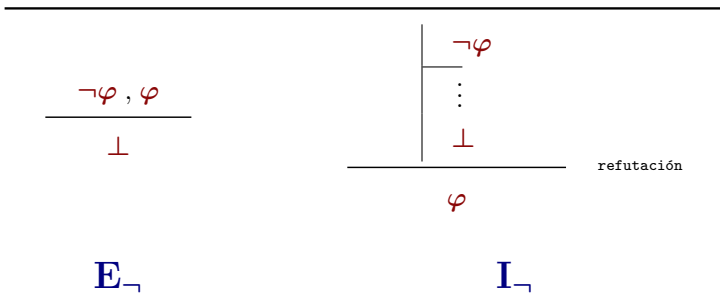
$$\frac{\neg\varphi, \varphi}{\perp}$$

$$\mathbf{E}_{\neg}$$

Para la negación \neg

$\frac{\neg\varphi, \varphi}{\perp}$	$\frac{\begin{array}{ l} \neg\varphi \\ \hline \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi}$	refutación
--------------------------------------	---	------------

E_{\neg}

Para la negación \neg 

Para la conjunción \wedge

Para la conjunción \wedge

 $\varphi \wedge \psi$

 φ

 $\varphi \wedge \psi$

 ψ

Para la conjunción \wedge

$$\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}}{\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}} \mathbf{E}_{\wedge}$$

Para la conjunción \wedge

$$\begin{array}{c}
 \hline
 \varphi \wedge \psi \\
 \hline
 \varphi \\
 \varphi \wedge \psi \\
 \hline
 \psi \\
 \\
 \mathbf{E}_{\wedge} \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \varphi, \psi \\
 \hline
 \varphi \wedge \psi
 \end{array}$$

Para la conjunción \wedge

$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$	
$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$	$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
\mathbf{E}_{\wedge}	\mathbf{I}_{\wedge}

Para la disyunción \vee

Para la disyunción \vee

$$\begin{array}{c}
 \varphi \vee \psi, \quad \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right. \\
 \hline
 \chi
 \end{array}$$

Para la disyunción \vee

$$\varphi \vee \psi, \quad \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right.$$

$$\chi$$

$$\mathbf{E}_{\vee}$$

Para la disyunción \vee

$$\begin{array}{c}
 \varphi \vee \psi, \quad \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right. \\
 \hline
 \chi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \\
 \\
 \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}
 \end{array}$$

 \mathbf{E}_{\vee}

Para la disyunción \vee

$$\begin{array}{c}
 \varphi \vee \psi, \quad \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \right. \\
 \hline
 \chi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \\
 \\
 \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}
 \end{array}$$

 \mathbf{E}_{\vee} \mathbf{I}_{\vee}

For *predicate* logic

Para presentar las reglas de *introducción* y *eliminación* para \forall y \exists , necesitamos recordar dos definiciones.

For *predicate* logic

Para presentar las reglas de *introducción* y *eliminación* para \forall y \exists , necesitamos recordar dos definiciones.

- **Variable ligada.**

For *predicate* logic

Para presentar las reglas de *introducción* y *eliminación* para \forall y \exists , necesitamos recordar dos definiciones.

- **Variable ligada.**
- **Substitución de una variable por un término en una fórmula.**

Variable ligada

Variable ligada

- **Alcance de un cuantificador.** En una fórmula de la forma $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$), la sub-fórmula φ se conoce como **el alcance** del cuantificador \forall (\exists).

Variable ligada

- **Alcance de un cuantificador.** En una fórmula de la forma $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$), la sub-fórmula φ se conoce como **el alcance** del cuantificador \forall (\exists).
- **Variables ligada a cuantificadores.** En una fórmula de la forma $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$), toda aparición de x en φ está **ligada al cuantificador** \forall (\exists) siempre y cuando no esté ligada a otro cuantificador en φ .

Variable ligada

- Alcance de un cuantificador.** En una fórmula de la forma $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$), la sub-fórmula φ se conoce como **el alcance** del cuantificador \forall (\exists).
- Variables ligada a cuantificadores.** En una fórmula de la forma $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$), toda aparición de x en φ está **ligada al cuantificador** \forall (\exists) siempre y cuando no esté ligada a otro cuantificador en φ .
- Variable ligada.** En una fórmula φ , una aparición de una variable x está **ligada** si existe un cuantificador en φ al que x esté ligada.

Substitución (1)

Substitución (1)

- **Substitución dentro de un término.** El término que resulta de reemplazar las apariciones de la variable y por el término t dentro del término s se denota como

$$(s)_t^y$$

Substitución (1)

- **Substitución dentro de un término.** El **término** que resulta de reemplazar las apariciones de la variable y por el término t dentro del **término** s se denota como

$$(s)_t^y$$

- Formalmente,

Dada una **constante** a :

$$(c)_t^y := c$$

Dada una **variable** x :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x)_t^y := x \\ (y)_t^y := t \end{array} \right. \text{ para todo } x \text{ diferente de } y$$

Substitución (1)

- **Substitución dentro de un término.** El **término** que resulta de reemplazar las apariciones de la variable y por el término t dentro del **término** s se denota como

$$(s)_t^y$$

- Formalmente,

Dada una **constante** a : $(a)_t^y := a$

Dada una **variable** x : $\left\{ \begin{array}{l} (x)_t^y := x \\ (y)_t^y := t \end{array} \right.$ para todo x diferente de y

Ejemplos:

$$(a)_c^x := a$$

$$(x)_a^y := x$$

$$(z)_y^z := y$$

Substitución (2)

Substitución (2)

- **Substitución dentro de una fórmula.** La **fórmula** que resulta de reemplazar **las apariciones libres** de la variable **y** por el término **t** dentro de la **fórmula** **s** se denota como

$$(s)_t^y$$

Substitución (2)

- **Substitución dentro de una fórmula.** La **fórmula** que resulta de reemplazar **las apariciones libres** de la variable **y** por el término **t** dentro de la **fórmula** **s** se denota como

$$(\varphi)_t^y$$

- Formalmente,

$$\begin{array}{l}
 (Pt_1 \cdots t_n)_t^y := P(t_1)_t^y \cdots (t_n)_t^y \\
 (\neg\varphi)_t^y := \neg(\varphi)_t^y \\
 (\varphi \wedge \psi)_t^y := (\varphi)_t^y \wedge (\psi)_t^y \\
 (\varphi \vee \psi)_t^y := (\varphi)_t^y \vee (\psi)_t^y \\
 (\varphi \rightarrow \psi)_t^y := (\varphi)_t^y \rightarrow (\psi)_t^y \\
 (\varphi \leftrightarrow \psi)_t^y := (\varphi)_t^y \leftrightarrow (\psi)_t^y
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\forall x\varphi)_t^y := \forall x(\varphi)_t^y \\
 (\forall y\varphi)_t^y := \forall y\varphi
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\exists x\varphi)_t^y := \exists x(\varphi)_t^y \\
 (\exists y\varphi)_t^y := \exists y\varphi
 \end{array} \right.$$

Para el cuantificador universal \forall

Para el cuantificador universal \forall

$$\frac{\forall x \varphi}{(\varphi)_t^x}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

Para el cuantificador universal \forall

$$\frac{\forall x \varphi}{(\varphi)_t^x}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$$E_{\forall}$$

Para el cuantificador universal \forall

$$\frac{\forall x \varphi}{(\varphi)_t^x}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$$E_{\forall}$$

$$\frac{\begin{array}{c} u \\ | \\ \hline \vdots \\ (\varphi)_u^x \end{array}}{\forall x \varphi}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

Para el cuantificador universal \forall

$$\frac{\forall x \varphi}{(\varphi)_t^x}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$$E_{\forall}$$

$$\frac{\begin{array}{c} u \\ | \\ \hline \vdots \\ | \\ (\varphi)_u^x \end{array}}{\forall x \varphi}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$$I_{\forall}$$

Para el cuantificador existencial \exists

Para el cuantificador existencial \exists

$$\begin{array}{c}
 \exists x \varphi, \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 u \mid (\varphi)_u^x \\
 \hline
 \vdots \\
 \psi
 \end{array} \\
 \hline
 \psi
 \end{array}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

Para el cuantificador existencial \exists

$$\begin{array}{c}
 \exists x \varphi, \quad \begin{array}{|l} u \\ \hline (\varphi)_u^x \\ \vdots \\ \psi \end{array} \\
 \hline
 \psi
 \end{array}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

E_∃

Para el cuantificador existencial \exists

$$\begin{array}{c}
 \exists x \varphi, \quad \begin{array}{|l} u \\ \hline (\varphi)_u^x \\ \vdots \\ \psi \end{array} \\
 \hline
 \psi
 \end{array}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$$\frac{(\varphi)_t^x}{\exists x \varphi}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

E_∃

Para el cuantificador existencial \exists

$$\begin{array}{c}
 \exists x \varphi, \quad \begin{array}{|l}
 u \\
 \hline
 (\varphi)_u^x \\
 \vdots \\
 \psi
 \end{array} \\
 \hline
 \psi
 \end{array}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$$\mathbf{E}_{\exists}$$

$$\frac{(\varphi)_t^x}{\exists x \varphi}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$$\mathbf{I}_{\exists}$$

Para el símbolo de igualdad =

Para el símbolo de igualdad =

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_1/t_2]$$

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_2/t_1]$$

donde $\varphi[t_1/t_2]$ es el resultado de reemplazar, en φ , algunas apariciones de t_2 por t_1 , siempre y cuando

Para el símbolo de igualdad =

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_1/t_2]$$

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_2/t_1]$$

donde $\varphi[t_1/t_2]$ es el resultado de remplazar, en φ , algunas apariciones de t_2 por t_1 , siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ , y

Para el símbolo de igualdad =

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_1/t_2]$$

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_2/t_1]$$

donde $\varphi[t_1/t_2]$ es el resultado de remplazar, en φ , algunas apariciones de t_2 por t_1 , siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ , y
- t_1 contenga solo variables que no se vuelven ligada después de la substitución.

Para el símbolo de igualdad =

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_1/t_2]$$

$$t_1 = t_2, \varphi$$

$$\varphi[t_2/t_1]$$

donde $\varphi[t_1/t_2]$ es el resultado de remplazar, en φ , algunas apariciones de t_2 por t_1 , siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ , y
- t_1 contenga solo variables que no se vuelven ligada después de la substitución.

$$\mathbf{E}_=$$

Para el símbolo de igualdad =

$$\frac{t_1 = t_2, \varphi}{\varphi[t_1/t_2]}$$

$$\frac{t_1 = t_2, \varphi}{\varphi[t_2/t_1]}$$

$$\frac{}{t = t}$$

donde $\varphi[t_1/t_2]$ es el resultado de remplazar, en φ , algunas apariciones de t_2 por t_1 , siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ , y
- t_1 contenga solo variables que no se vuelven ligada después de la substitución.

para cualquier término t .

E₌

Para el símbolo de igualdad =

$$\begin{array}{c}
 \frac{t_1 = t_2, \varphi}{\varphi[t_1/t_2]} \\
 \frac{t_1 = t_2, \varphi}{\varphi[t_2/t_1]}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{}{t = t}$$

donde $\varphi[t_1/t_2]$ es el resultado de remplazar, en φ , algunas apariciones de t_2 por t_1 , siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ , y
- t_1 contenga solo variables que no se vuelven ligada después de la substitución.

para cualquier término t .

$$\mathbf{E}_=$$

$$\mathbf{I}_=$$